

УДК 517.44+621.391

doi:10.21685/2072-3040-2021-3-6

Решение начально-краевых задач математической физики на основе формулы Котельникова

О. Э. Яремко¹, Н. Н. Яремко²

¹Московский государственный технологический
университет «СТАНКИН», Москва, Россия

²Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹yaremki@mail.ru, ²yaremki@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Численные методы решения дифференциальных уравнений – актуальная проблема прикладной математики. Работа посвящена численно-аналитическим методам второго и третьего порядка точности, основанным на аппроксимации нелинейных дифференциальных уравнений кусочно-линейными. *Материалы и методы.* Метод интегральных преобразований для решения уравнений математической физики дополнен методом разложения сигнала в ряд по формуле Котельникова. Методы аналитического продолжения и интегрального преобразования Гильберта послужили основой для описания аналитических сигналов. *Результаты.* Предлагается новый аналитический метод решения задач математической физики, представляющий синтез метода интегрального преобразования Фурье и разложения в ряд Котельникова. Предложен алгоритм: найти образ Фурье начально-краевых данных, найденный образ разложить в ряд Фурье, вернуться к оригиналу. Предложенный алгоритм реализуется в предположении ограниченности носителя образа Фурье. Таким образом, получаем дискретные аналоги интегральных формул Пуассона для решения задачи Коши и задачи Дирихле. Получен дискретный аналог формул Коши и Шварца для функции аналитической в полуплоскости. *Выводы.* Предложенные методы могут быть полезны при создании новых численных методов решения задач Коши и Дирихле.

Ключевые слова: формула Котельникова, преобразование Фурье, задача Коши, задача Дирихле, преобразование Гильберта, аналитический сигнал

Для цитирования: Яремко О. Э., Яремко Н. Н. Решение начально-краевых задач математической физики на основе формулы Котельникова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 3. С. 71–81. doi:10.21685/2072-3040-2021-3-6

Solving initial-boundary mathematical physics' problems based on Kotelnikov formula (the Nyquist–Shannon formula)

O.E. Yaremko¹, N.N. Yaremko²

¹Moscow State University of Technology “STANKIN”, Moscow, Russia

²Penza State University, Penza, Russia

¹yaremki@mail.ru, ²yaremki@yandex.ru

Abstract. *Background.* Numerical methods for differential equations solving is a topical problem in applied mathematics. The article is devoted to the numerical-analytical methods of the second and third order of accuracy, based on the approximation of nonlinear differential equations by piecewise-linear ones. *Materials and methods.* Integral transform methods

for solving equations of mathematical physics is supplemented by the method of expanding the signal in a series according to the Kotelnikov formula (the Nyquist–Shannon formula). Analytical continuation method and Hilbert integral transform one served as the basis for the description of analytical signals. *Results.* A new analytical method for solving problems of mathematical physics is proposed, which is a synthesis of Integral Fourier transform method and the expansion method into the Kotelnikov series. An algorithm is proposed: first, find the Fourier image of the initial-boundary data; second, expand the found image in a Fourier series; thirdly, we go back to the original. The proposed algorithm is implemented under the assumption that the Fourier image support is bounded. Thus, we obtain discrete analogs of Poisson integral formulas for solving the Cauchy problem and the Dirichlet problem. A discrete analogue of the Cauchy and Schwarz formulas for an analytic function in a half-plane is obtained in the article. *Conclusions.* The proposed methods can be useful in creating new numerical methods for Cauchy and Dirichlet problems solving.

Keywords: Kotelnikov formula (the Nyquist–Shannon formula), Fourier transform, Cauchy problem, Dirichlet problem, Hilbert transform, analytical signal

For citation: Yaremko O.E., Yaremko N.N. Solving initial-boundary mathematical physics' problems based on Kotelnikov formula (the Nyquist–Shannon formula). *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2021;(3):71–81. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-3-6

Введение

Теорема отсчетов Найквиста – Шеннона – Котельникова [1–6] связывает непрерывные и дискретные сигналы. Теорема утверждает, что дискретная последовательность отсчетов непрерывного сигнала $y = f(x)$, идущих друг за другом за T секунд и состоящих из частот от 0 до f_c , $2f_c T = 1$, несет всю информацию о непрерывном сигнале. Другими словами, непрерывный сигнал

$$y = f(x),$$

преобразование Фурье которого

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \lambda \xi} f(\xi) d\xi \quad (1)$$

равно нулю вне отрезка

$$[-f_c, f_c],$$

можно представить в виде интерполяционного ряда

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{T} (x - kT) \right], \quad (2)$$

где

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Цель настоящей работы – применить теорему отсчетов для решения модельных задач математической физики и в теории интегральных представ-

лений функций аналитических в верхней полуплоскости. В предположении финитности образа Фурье начальных или граничных данных задачи мы получим представление решения в виде суммы интерполяционного ряда.

Приведем стандартные сведения из аналитической теории сигналов. Пусть дан непрерывный сигнал $y = f(x)$ и пусть функция $\Phi(\lambda)$ – его образ Фурье. Разложим функцию $\Phi(\lambda)$ в ряд Фурье на промежутке $[-f_c, f_c]$:

$$\Phi(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi\lambda n\Delta},$$

где

$$c_n = \int_{-f_c}^{f_c} e^{-i2\pi\lambda n\Delta} F(\lambda) d\lambda.$$

На основании формулы обращения преобразования Фурье

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\lambda x} \Phi(\lambda) d\lambda$$

получим

$$c_n = \int_{-f_c}^{f_c} e^{-i2\pi\lambda n\Delta} \Phi(\lambda) d\lambda,$$

где $c_n = f(-n\Delta)$.

Значит, справедлива формула

$$\Phi(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-n\Delta) e^{i2\pi\lambda n\Delta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta) e^{-i2\pi\lambda n\Delta}. \quad (3)$$

Таким образом, преобразование Фурье сигнала можно точно вычислить по формуле (3) квадратурного типа.

1. Преобразование Гильберта

Преобразование Гильберта произвольного сигнала представляет собой идеальный широкополосный фазовращатель, который осуществляет поворот начальных фаз всех частотных составляющих сигнала на угол, равный 90° (сдвиг на $\pi/2$). Преобразование Гильберта позволяет разложить исходный процесс на две составляющие: амплитудную и фазовую. Это обстоятельство находит применение в теории сигналов.

Преобразованием Гильберта непрерывного сигнала $y = f(x)$ называют функцию [7–11]:

$$H[f(x)] = F^{-1} \left[i \frac{\lambda}{|\lambda|} \Phi(\lambda) \right].$$

В развернутом виде преобразование Гильберта имеет вид

$$H[f(x)] = i \int_{-f_c}^{f_c} e^{i2\pi\lambda x} \frac{\lambda}{|\lambda|} \Phi(\lambda) d\lambda.$$

Из последней формулы найдем выражение для преобразования Гильберта в виде интерполяционного ряда

$$H[f(x)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{1 - \cos\left[\frac{\pi}{T}(x - kT)\right]}{\left[\frac{\pi}{T}(x - kT)\right]}.$$

2. Формула Котельникова в задаче Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной оси

Требуется решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, x \in R, \quad (4)$$

при начальных условиях

$$u(0, x) = f(x), \quad (5)$$

заданных на бесконечной прямой, и при дополнительном условии ограниченности решения при всех значениях x и при всех $t > 0$. Исследованию задачи Коши посвящены источники [12–15]. Решение задачи (4)–(5) можно найти по формуле [12]:

$$u(t, x) = F^{-1} \left[e^{-\lambda^2 4\pi^2 t} \Phi(\lambda) \right].$$

Предполагая финитность образа Фурье сигнала $f(x)$, на основе формулы Котельникова (1) получаем решение задачи Коши (4)–(5) в следующем виде:

$$u(t, x) = \int_{-f_c}^{f_c} e^{i2\pi\lambda x} e^{-\lambda^2 4\pi^2 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-i2\pi\lambda kT} d\lambda, \\ u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-(x - kT)^2 / 4t\right)}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \operatorname{Re} \left(\operatorname{erf} \left(\pi \frac{\sqrt{t}}{T} + i \frac{x - kT}{2\sqrt{t}} \right) \right) f(kT), \quad (6)$$

где функция $\operatorname{erf}(x)$ определена в монографии [16]:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Значительно интереснее приближенная формула на основе (2):

$$u(t, x) \cong \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\lambda x} e^{-\lambda^2 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-i2\pi\lambda kT} d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-\frac{(x-kT)^2}{4t}}.$$

Оценим погрешность полученной формулы в предположении абсолютной сходимости ряда $M = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(kT)|$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{|\lambda| \geq f_c} e^{i2\pi\lambda x} e^{-\lambda^2 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-i2\pi\lambda kT} d\lambda \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{|\lambda| \geq f_c} e^{-\lambda^2 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(kT)| d\lambda \right| \leq \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-f_c^2 t} M. \end{aligned}$$

В частности, для значений $t > T$ получим оценку погрешности

$$|\delta| \leq \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{f_c^2}{2} t} M.$$

3. Формула Котельникова в задаче Дирихле для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости

Пусть в полуплоскости $R_2^+ = \{-\infty < x < \infty, y > 0\}$ требуется найти ограниченное решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad (7)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (8)$$

Можно доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на $(-\infty, \infty)$, то решение задачи Дирихле для верхней полуплоскости единственно в классе ограниченных функций. Метод Фурье приводит к формуле для решения

$$u(x, y) = F^{-1} \left[e^{-2\pi\lambda y} \Phi(\lambda) \right]. \quad (9)$$

Формула (9) допускает преобразование к виду, который называется формулой Пуассона [12]:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} f(\xi) d\xi.$$

Аналогично рассмотренной в п. 2 задаче Коши можно получить дискретный аналог формулы Пуассона

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\exp(-2f_c y) \left(\frac{(x-kT) \sin(2\pi f_c (x-kT))}{(x-kT)^2 + y^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - y \frac{\cos(2\pi f_c (x-kT))}{(x-kT)^2 + y^2} \right) + \frac{y}{(x-kT)^2 + y^2} \right) \cdot f(kT). \quad (10)$$

Так же как в п. 2, доказывается приближенная формула

$$u(x, y) \cong \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\lambda x} e^{-|\lambda|y} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-i2\pi\lambda kT} d\lambda = \\ = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{y}{(x-kT)^2 + y^2}.$$

Оценим погрешность полученной формулы в предположении абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(kT)| = M$:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda| \geq f_c} e^{i2\pi\lambda x} e^{-|\lambda|y} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-i2\pi\lambda kT} d\lambda \right| \leq \\ \leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda| \geq f_c} e^{-|\lambda|y} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(kT)| d\lambda \right| \leq \frac{1}{\pi y} e^{-f_c y} M.$$

4. Формула Котельникова для аналитической функции в верхней полуплоскости

Сопряженную к данной гармонической функции $u(x, y)$ можно вычислять по формуле $v(x, y) = H[u(x, y)]$ [15], т.е. справедлива формула

$$v(x, y) = i \int_{-f_c}^{f_c} e^{i2\pi\lambda x} \frac{\lambda}{|\lambda|} \Phi(\lambda, y) d\lambda. \quad (11)$$

Теорема. Пусть функция $u(x, y)$ – решение задачи Дирихле (7), (8), тогда для функции $v(x, y)$, гармонически сопряженной с функцией $u(x, y)$, справедлива формула

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left(-\exp(-2f_c y) \left(\frac{(x-kT) \cos(2\pi f_c (x-kT))}{(x-kT)^2 + y^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + y \frac{\sin(2\pi f_c (x-kT))}{(x-kT)^2 + y^2} \right) + \frac{x-kT}{(x-kT)^2 + y^2} \right) \cdot f(kT). \quad (12)$$

Доказательство. Подставим в формулу (11) выражение для изображения Фурье граничного условия

$$\Phi(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-i2\pi\lambda nT},$$

тогда получим

$$v(x, y) = i \int_{-f_c}^{f_c} e^{i2\pi\lambda x} e^{-2\pi|\lambda|y} \frac{\lambda}{|\lambda|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta) e^{-i2\pi\lambda n\Delta} d\lambda.$$

Вычисляя интегралы, приходим к формуле (12).

Теорема. Пусть функция $w = f(z)$ аналитическая в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ и непрерывна в $\text{Im } z \geq 0$. Пусть также образ Фурье $\Phi(\lambda)$ функции $f(x + i0)$ равен нулю вне отрезка $[-f_c, f_c]$, тогда справедлива формула типа Котельникова

$$f(z) = \frac{T}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{if_c 2\pi(z-nT)} - 1}{z - nT} f(nT). \quad (13)$$

Доказательство. Установим справедливость интегрального представления

$$f(z) = \int_{-f_c}^{f_c} e^{i2\pi|\lambda|z} \Phi(\lambda) d\lambda. \quad (14)$$

В самом деле, левая и правая части совпадают на действительной оси по построению. Правая часть функции аналитическая в верхней полуплоскости. По теореме единственности [17] формула (13) доказана. Подставим в (14) ряд для $\Phi(\lambda)$:

$$\Phi(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-i2\pi\lambda nT},$$

тогда получим

$$f(z) = \int_{-f_c}^{f_c} e^{i2\pi|\lambda|z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-i2\pi\lambda nT} d\lambda. \quad (15)$$

Меняя местами порядок интегрирования и суммирования в формуле (15), получим дискретный аналог интегральной формулы Коши [17] для полуплоскости.

Теорема. Пусть функция $w = f(z)$ аналитическая в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ и непрерывна в $\text{Im } z \geq 0$. Пусть также образ Фурье $\Phi(\lambda)$

функции $u(x, 0)$ равен нулю вне отрезка $[-f_c, f_c]$, тогда справедлив дискретный аналог формулы Шварца [17]:

$$f(z) = \frac{2T}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{if_c 2\pi(z-nT)} - 1}{z - nT} u(nT, 0), \quad (16)$$

где

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z).$$

Доказательство. Правая часть формулы аналитическая в верхней полуплоскости, равенство $\operatorname{Re} f(x + i0) = u(x, 0)$ следует из формулы (16).

Следствие. Положим $y = 0$, тогда получим

$$f(x + i0) = \frac{2T}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{if_c 2\pi(x-nT)} - 1}{x - nT} u(nT, 0). \quad (17)$$

Формула (17) восстанавливает аналитический сигнал [8] по последовательности отсчетов его действительной части.

5. Формула Котельникова для обратных задач математической физики

5.1. Обратная задача теплопроводности состоит в определении начального распределения поля по его значению в момент $t = t_0$. Известно, что такая задача некорректна [18, 19], однако ее решение существует, единственно и может быть найдено по формуле

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{(x - kT)^2}{4(t_0 - t)}\right)}{2\sqrt{\pi(t_0 - t)}} \times \\ \times \operatorname{Re} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x - kT}{2\sqrt{(t_0 - t)}} + i\pi \frac{\sqrt{t_0 - t}}{T} \right) \right) \cdot (t_0, kT). \quad (18)$$

Формула (18) может быть положена в основу конструкции регуляризующих алгоритмов.

5.2. Обратная задача Дирихле состоит в определении решения уравнения Лапласа по его значению на прямой $y = y_0$. Известно, что такая задача некорректна [18], однако ее решение существует, единственно и может быть найдено по формуле

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\exp(2\pi f_c(y_0 - y)) \left(\frac{(x - kT) \sin(2\pi f_c(x - kT))}{(x - kT)^2 + (y_0 - y)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + (y_0 - y) \frac{\cos(2\pi f_c(x - kT))}{(x - kT)^2 + (y_0 - y)^2} \right) - \frac{(y_0 - y)}{(x - kT)^2 + (y_0 - y)^2} \right) \cdot u(kT, y_0). \quad (19)$$

Кроме того, формула (19) может быть положена в основу регуляризующих алгоритмов.

Заключение

Полученные в работе результаты показывают, что последовательность отсчетов $\{kT\}$ непрерывного сигнала $f(x)$, состоящая из гармоник с частотами от 0 до f_c , несет всю информацию о структуре нестационарных и стационарных непрерывных полей. Формулы (10), (11), (15), (16) определяют решение прямых и обратных задач Коши и Дирихле по сумме ряда, что позволит построить новые вычислительные алгоритмы.

Список литературы

1. Котельников В. А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Успехи физических наук. 2006. № 7. С. 762–770.
2. Джерри А. Дж. Теорема отсчетов Шеннона, ее различные обобщения и приложения. Обзор // Труды Института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. 1977. Т. 65, № 11. С. 53–89.
3. Басараб М. А., Зелкин Е. Г., Кравченко В. Ф., Яковлев В. П. Цифровая обработка сигналов на основе теоремы Уиттекера – Котельникова – Шеннона. М. : Радиотехника, 2004. 72 с.
4. Shannon C. E. Communication in the presence of noise // Proc. Institute of Radio Engineers. 1949. Vol. 37, № 1. P. 10–21.
5. Marks R. J. Handbook of Fourier Analysis and Its Applications. Oxford : Oxford University Press, 2009. 800 с.
6. Brandwood D. Fourier Transforms in Radar and Signal Processing. Boston : Artech House, 2003. 213 p.
7. King Fr. W. Hilbert Transforms. Cambridge : Cambridge University Press, 2009.
8. Smith J. O. Analytic Signals and Hilbert Transform Filters, in Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT) with Audio Applications. W3K Publishing, 2007.
9. Titchmarsh E. Introduction to the theory of Fourier integrals. 2nd ed. Oxford : Clarendon Press, 1986. 395 p.
10. Bracewell R. The Fourier Transform and Its Applications. McGraw-Hill, 1965. 269 p.
11. Smith J. O. Analytic Signals and Hilbert Transform Filters, in Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT) with Audio Applications. Second Edition. 2007. URL: <https://www.dsprelated.com>
12. Yanushauskas A. Dirichlet problem, Encyclopedia of Mathematics. EMS Press, 2001.
13. Taylor M. E. Partial differential equations I. Basic theory, Applied Mathematical Sciences. 2nd ed. Springer, 2011. 563 p.
14. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Курс высшей математики и математической физики // Дифференциальные уравнения. М. : Физматлит, 2005.
15. Hörmander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Springer, 1983. 537 p.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований: Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М. : Наука, 1970. 324 с.
17. Saff E. B., Snider A. D. Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science, and Engineering. Second Edition. Prentice Hall, 1993. 521 p.
18. Tikhonov A. N., Arsenin, V. Y. Solutions of Ill-Posed Problems. New York : Winston, 1977. 258 p.
19. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М. : Наука, 1980. 285 с.

References

1. Kotelnikov V.A. On the bandwidth of ‘ether’ and wire in telecommunications. *Uspekhi fizicheskikh nauk = Advances in physical sciences*. 2006;(7):762–770. (In Russ.)
2. Dzherri A.Dzh. Shannon's sampling theorem, its various generalizations and applications. Review. *Trudy Instituta inzhenerov po elektrotekhnike i radioelektronike = Proceedings of the Institute of Electrical and Electronic Engineers*. 1977;65(11):53–89. (In Russ.)
3. Basarab M.A., Zelkin E.G., Kravchenko V.F., Yakovlev V.P. *Tsifrovaya obrabotka signalov na osnove teoremy Uittkera – Kotelnikova – Shennona = Digital signal processing based on the Whittaker – Kotelnikov – Shannon theorem*. Moscow: Radio-tekhnika, 2004:72. (In Russ.)
4. Shannon C.E. Communication in the presence of noise. *Proc. Institute of Radio Engineers*. 1949;37(1):10–21.
5. Marks R.J. *Handbook of Fourier Analysis and Its Applications*. Oxford: Oxford University Press, 2009:800.
6. Brandwood D. *Fourier Transforms in Radar and Signal Processing*. Boston: Artech House, 2003:213.
7. King Fr.W. *Hilbert Transforms*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
8. Smith J.O. *Analytic Signals and Hilbert Transform Filters, in Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT) with Audio Applications*. W3K Publishing, 2007.
9. Titchmarsh E. *Introduction to the theory of Fourier integrals*. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 1986:395.
10. Bracewell R. *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill, 1965:269.
11. Smith J.O. *Analytic Signals and Hilbert Transform Filters, in Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT) with Audio Applications. Second Edition*. 2007. Available at: <https://www.dsprelated.com>
12. Yanushauskas A. *Dirichlet problem, Encyclopedia of Mathematics*. EMS Press, 2001.
13. Taylor M.E. *Partial differential equations I. Basic theory, Applied Mathematical Sciences*. 2nd ed. Springer, 2011:563.
14. Tikhonov A.N., Vasil'eva A.B., Sveshnikov A.G. Course of higher mathematics and mathematical physics. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. Moscow: Fizmatlit, 2005. (In Russ.)
15. Hörmander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer, 1983:537.
16. Beytmen G., Erdeyi A. *Tablitsy integral'nykh preobrazovaniy: Preobrazovaniya Besselya. Integraly ot spetsial'nykh funktsiy = Integral transformation tables: Bessel transforms. Integrals from special functions*. Moscow: Nauka, 1970:324. (In Russ.)
17. Saff E.B., Snider A.D. *Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science, and Engineering*. Second Edition. Prentice Hall, 1993:521.
18. Tikhonov A.N., Arsenin, V.Y. *Solutions of Ill-Posed Problems*. New York: Winston, 1977:258.
19. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskiy S.P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza = Incorrect problems of mathematical physics and analysis*. Moscow: Nauka, 1980:285. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Олег Эмануилович Яремко

доктор физико-математических наук,
доцент, профессор кафедры прикладной
математики, Московский
государственный технологический
университет «СТАНКИН» (Россия,
г. Москва, Вадковский пер., 1)

E-mail: yaremki@mail.ru

Oleg E. Yaremko

Doctor of physical and mathematical
sciences, associate professor, professor
of the sub-department of applied
mathematics, Moscow State
University of Technology “STANKIN”
(1 Vadkovsky lane, Moscow, Russia)

Наталья Николаевна Яремко

доктор педагогических наук, доцент,
профессор кафедры математического
образования, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: yaremki@yandex.ru

Nataliya N. Yaremko

Doctor of pedagogical sciences, associate
professor, professor of the sub-department
of mathematical education, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 31.05.2021

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 20.06.2021

Принята к публикации / Accepted 07.07.2021